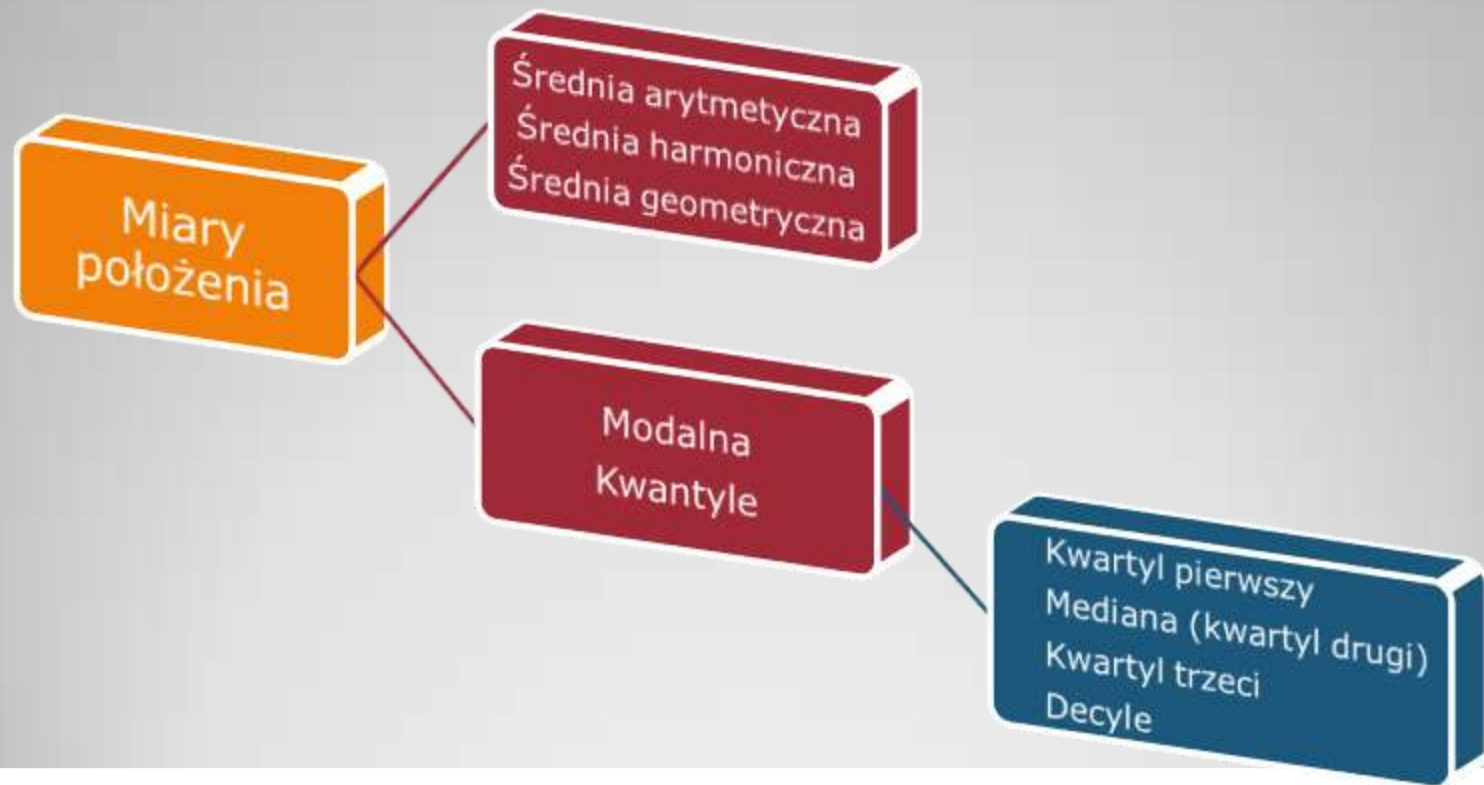


Miary położenia wskazują miejsce wartości najlepiej reprezentującej wszystkie wielkości danej zmiennej. Mówią o przeciętnym poziomie analizowanej cechy.



Średnia arytmetyczna – suma wartości zmiennej wszystkich jednostek badanej zbiorowości podzielona przez liczbę tych jednostek.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

gdzie: \bar{x} - symbol średniej arytmetycznej,
 x_i - warianty cechy mierzalnej,
 N - liczebność badanej zbiorowości

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+7}{4} = 4$$

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+5+5+5+7}{7} = 4,43$$

$$\bar{x} = \frac{1+3+30 \times 5+7}{33} = 4,88$$

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+7+20}{5} = 7,2$$

Właściwości średniej arytmetycznej

Średnia wyliczana z szeregów rozdzielczych punktowych

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_i n_i}{n}$$

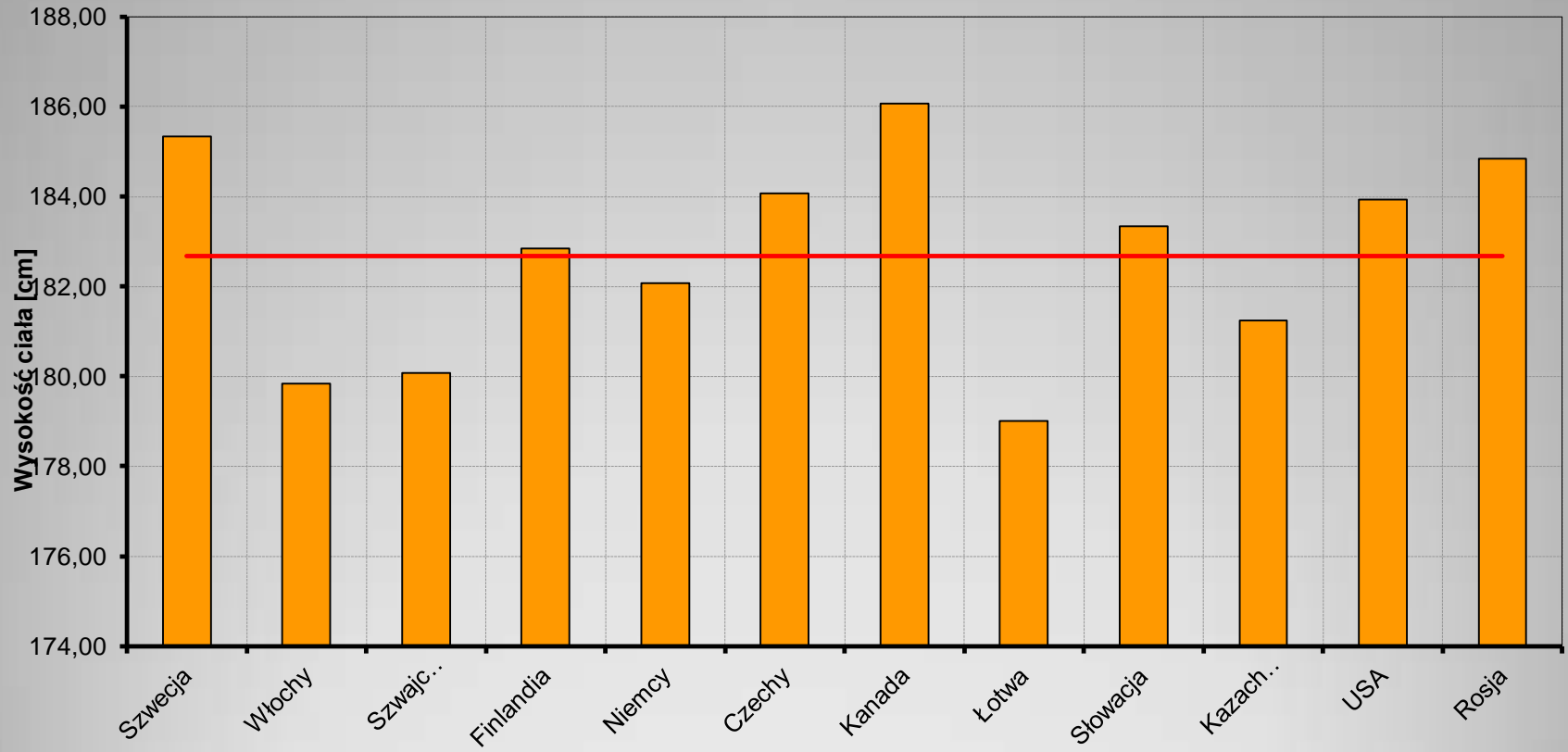
gdzie: \bar{x} - symbol średniej arytmetycznej,
 $x_1 \dots x_i$ - kolejne wartości zmiennej,
 $n_1 \dots n_i$ - liczba jedn. odpowiadająca danym wariantom zmiennej
 n - liczebność

Średnia wyliczana z szeregów rozdzielczych przedziałowych

$$\bar{x} = \frac{\dot{x}_1 n_1 + \dot{x}_2 n_2 + \dots + \dot{x}_i n_i}{n}$$

gdzie: \bar{x} - symbol średniej arytmetycznej,
 $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_i$ - środki przedziałów klasowych,
 $n_1 \dots n_i$ - liczba jedn. w danym przedziale klasowym
 n - liczebność

NAPASTNICY



Średnia arytmetyczna ważona

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i W_i}{\sum_{i=1}^n W_i}$$

gdzie: $w_i > 0$ tzw. wagi

Zadanie 3

Chcielibyśmy obliczyć ocenę końcową z przedmiotu STATYSTYKA z ocen cząstkowych, przedstawionych w poniższym szeregu:

Rodzaj oceny	Oc.1	Oc.2	Oc.3	Oc.4	Oc.5
oceny za aktywność	4	5	4	4	4
oceny z kolokwium pisemnego	3	2	3		
oceny z odpowiedzi ustnych	3	4			

Dla prowadzącego przedmiot, najistotniejszymi z punktu widzenia oceny końcowej są oceny z kolokwium pisemnego. Dlatego też zastosujemy wagę ocen w stosunku 2:4.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{4+5+4+4+4+3+2+3+3+4}{10} = \frac{36}{10} = 3,6$$

Rozwiązanie zadania 3

Rodzaj oceny	Oc.1	Oc.2	Oc.3	Oc.4	Oc.5
oceny za aktywność	4	5	4	4	4
oceny z kolokwium pisemnego	3	2	3		
oceny z odpowiedzi ustnych	3	4			

$$\bar{X}_w = \frac{(2 \times 4) + (4 \times 2,66)}{2 + 4} = \frac{18,64}{6} = 3,1$$

Modalna to wartość, która w rozkładzie empirycznym występuje najczęściej.

W szeregach szczegółowych i rozdzielczych jest to wartość cechy, której odpowiada największa liczebność.

$$Mo = x_o + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} k_m$$

- x_o - dolna granica przedziału, w którym występuje modalna,
- n_m - liczebność przedziału modalnej,
- n_{m-1} - liczebność klasy poprzedzającej przedział modalnej,
- n_{m+1} - liczebność klasy następującej po przedziale modalnej,
- k_m - rozpiętość przedziału klasowego modalnej.

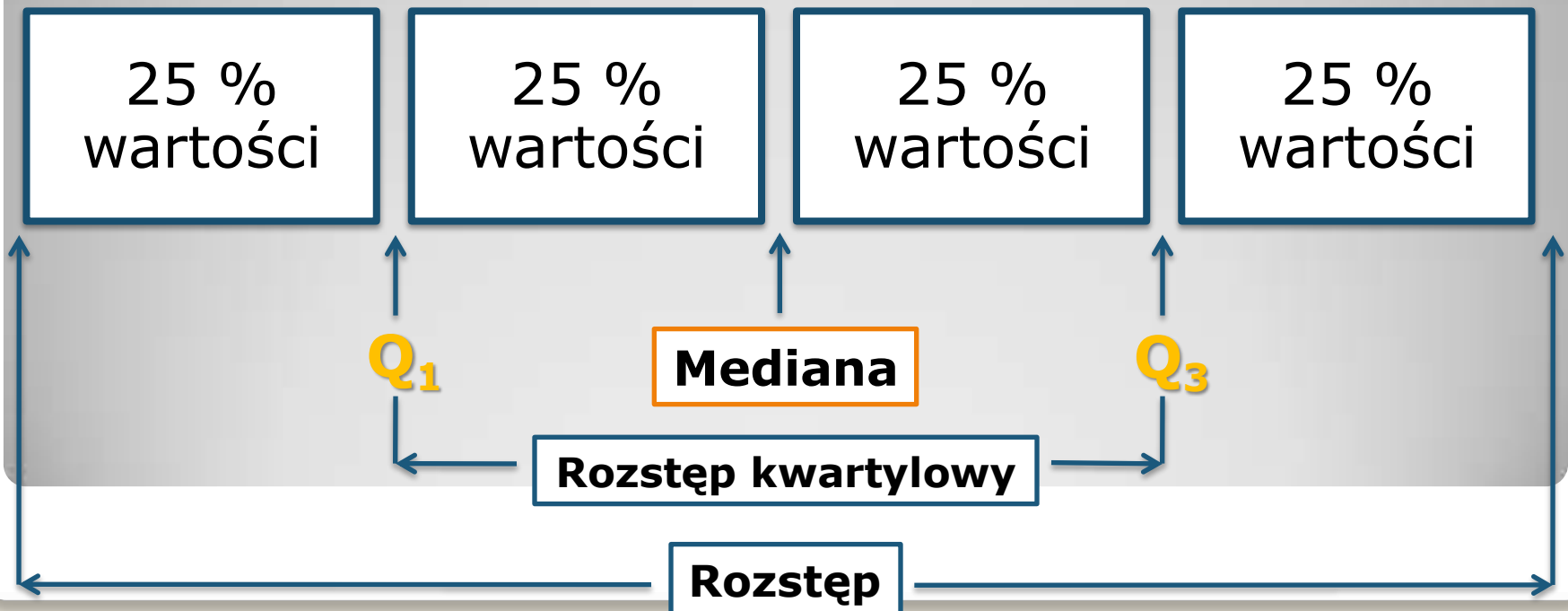
Kwantyle dzielą zbiorowość przedstawioną w postaci szeregu statystycznego na określone części pod względem liczby jednostek. Części te pozostają w stosunku do siebie w określonych proporcjach.

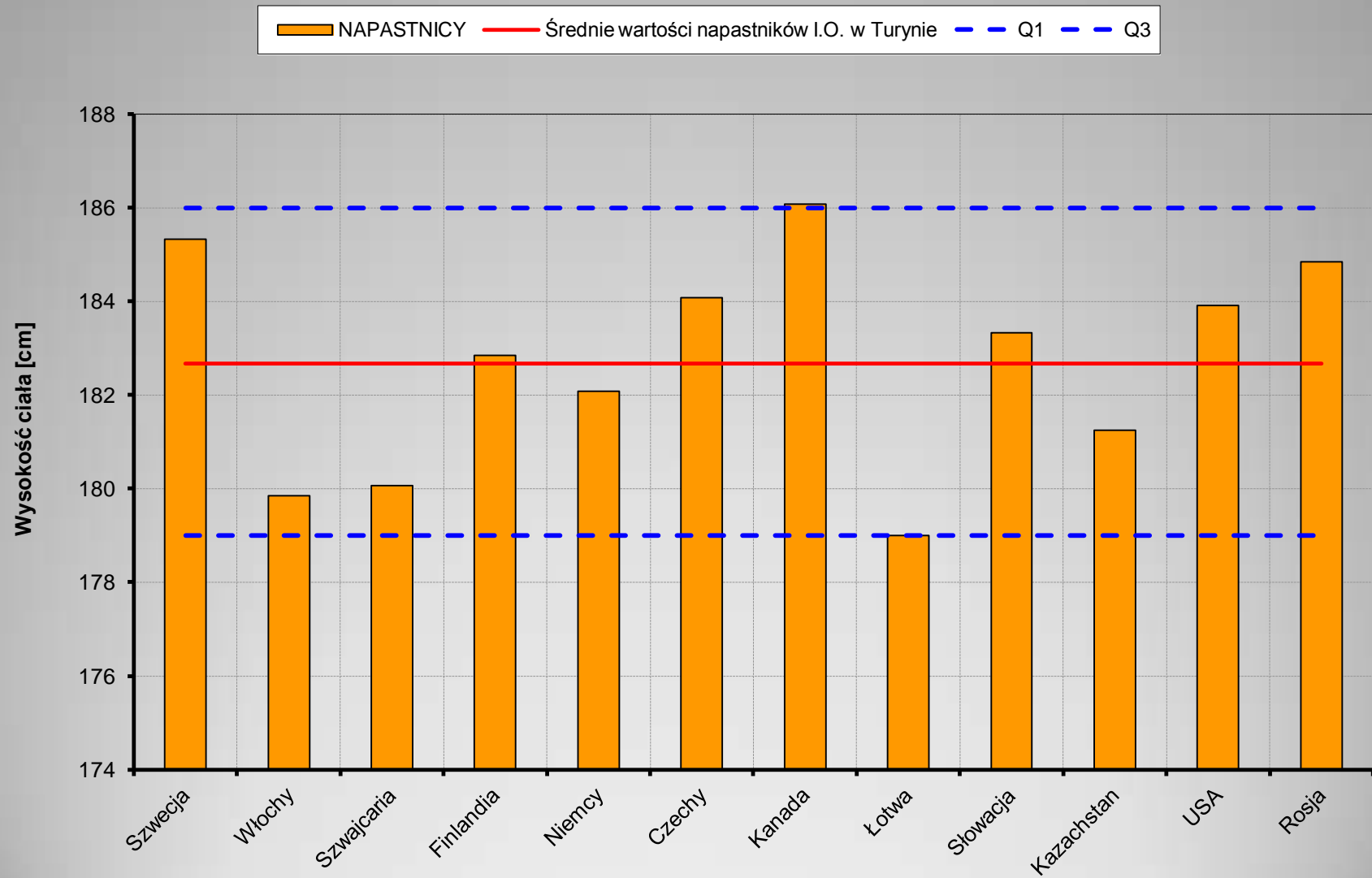
Kwartyle (wartości ćwiartkowe)

Kwartył pierwszy Q_1 jest to wartość jednostki, dzieląca zbiorowość w ten sposób, że $\frac{1}{4}$ (25%) jednostek ma od niej wartości nie większe, a $\frac{3}{4}$ (75%) nie mniejsze.

Kwartył drugi (mediana, wartość środkowa, Me) to wartość jednostki położonej w ten sposób, że dzieli zbiorowość na dwie równe części.

Kwartył trzeci Q_3 to wartość jednostki dzieląca zbiorowość w ten sposób, że $\frac{3}{4}$ (75%) jednostek ma od niej wartości nie większe, a $\frac{1}{4}$ (25%) nie mniejsze.





Wzory na obliczenie mediany w szeregu szczegółowym

w przypadku, gdy n jest
nieparzyste

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}}$$

w przypadku, gdy n jest
parzyste

$$Me = \frac{(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})}{2}$$

ZADANIE

W Mistrzostwa Świata w piłce nożnej ilość żółtych kartek otrzymanych przez zawodników reprezentacji narodowych przedstawia się następująco:

Reprezentacja	Kartki	Reprezentacja	Kartki
Hiszpania	9	Brazylia	3
Belgia	6	Japonia	8
Turcja	16	Holandia	9
Niemcy	13	Chorwacja	12
Anglia	15	Dania	10
Polska	11	Francja	7
Kamerun	6	Czechy	8
Nigeria	5	Słowacja	11

Wzór na obliczenie mediany w szeregu rozdzielczym przedziałowym

$$Me = x_m + \frac{k_m}{n_m} \left[\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} n_i \right]$$

m - numer klasy, w której występuje Mediana,

x_m - dolna granica tej klasy,

n_m - liczebność tej klasy,

k_m - rozpiętość tej klasy,

$\sum_{i=1}^{m-1} n_i$ - liczebność skumulowana do przedziału poprzedzającego klasę, w której występuje mediana.

Wzory na obliczenie kwartyła pierwszego w szeregu szczegółowym

n – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2}$$

n+1 – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = x_{\frac{n}{4}+1}$$

n+2 – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = x_{\frac{n}{4}+0,5}$$

n+3 – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = \frac{x_{\frac{n+1}{4}-0,5} + x_{\frac{n+1}{4}+0,5}}{2}$$

Wzory na obliczenie kwartyła trzeciego w szeregu szczegółowym

n – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = \frac{\frac{x_{3n}}{4} + \frac{x_{3n+1}}{4}}{2}$$

n+1 – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = \frac{x_{3(n+1)}}{4}$$

n+2 – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = x_{\frac{3n}{4}+0,5}$$

n+3 – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = \frac{\frac{x_{3(n+1)-0,5}}{4} + \frac{x_{3n+1+0,5}}{4}}{2}$$

MIARY ZMIENNOŚCI

Rozstęp jest miarą charakteryzującą empiryczny obszar zmienności badanej cechy.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Odchylenie ćwiartkowe – jest połową obszaru zmienności 50% środkowych jednostek zbiorowości.

$$Q = \frac{Q_{3.4} - Q_{1.4}}{2}$$

Współczynnik zmienności – jest względną miarą rozproszenia, służącą do porównywania zróżnicowania dwóch różnych cech lub jednej cechy w dwóch różnych grupach.

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Jeśli współczynniki zmienności przyjmują wartości liczbowe z przedziału od 0% do 100%, to fakt ten świadczy o niejednorodności zbiorowości.

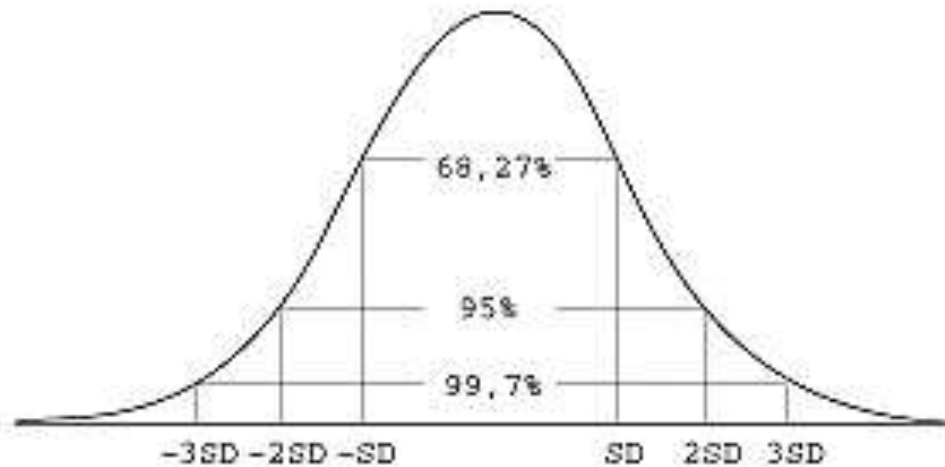
Jeśli $V > 20\%$, to zbiorowość jest znacznie zróżnicowana pod względem badanej cechy.

Wariancja – średnia arytmetyczna z kwadratów odchyleń poszczególnych wartości zmiennej od średniej arytmetycznej całej zbiorowości.

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Odchylenie standardowe – pierwiastek kwadratowy z wariancji.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



- 1) Jest wielkością obliczaną na podstawie wszystkich obserwacji.
- 2) Można je poddawać przekształceniom algebraicznym.
- 3) Im zbiorowość jest bardziej zróżnicowana, tym większe jest odchylenie standardowe.
- 4) Odchylenie standardowe spełnia regułę trzech sigm, według której w przypadku rozkładu normalnego lub zbliżonego do normalnego:
 - blisko 31,73% wszystkich obserwacji różni się od średniej arytmetycznej więcej niż o $\pm s$,
 - tylko około 5% obserwacji wykracza poza przedział $(\bar{x}-2s, \bar{x} +2s)$,
 - tylko 0,3% wszystkich obserwacji wykracza poza przedział $(\bar{x}-3s, \bar{x} +3s)$.

Reprezentacja	Kartki	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
Hiszpania	9	9	-0,31	0,10
Belgia	6	6	-3,31	10,97
Turcja	16	16	6,69	44,72
Niemcy	13	13	3,69	13,60
Anglia	15	15	5,69	32,35
Polska	11	11	1,69	2,85
Kamerun	6	6	-3,31	10,97
Nigeria	5	5	-4,31	18,60
Brazylia	3	3	-6,31	39,85
Japonia	8	8	-1,31	1,72
Holandia	9	9	-0,31	0,10
Chorwacja	12	12	2,69	7,22
Dania	10	10	0,69	0,47
Francja	7	7	-2,31	5,35
Czechy	8	8	-1,31	1,72
Słowacja	11	11	1,69	2,85
				$\Sigma = 193,44$

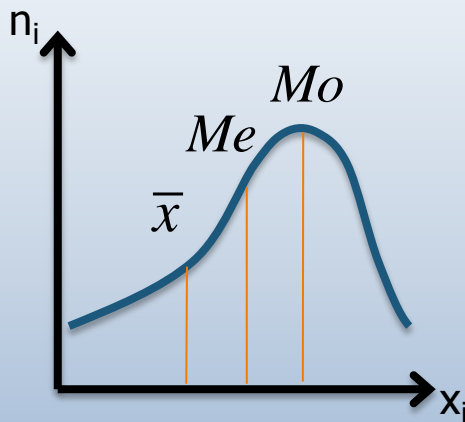
Tabela pomocnicza dla obliczenia wariancji
(odchylenia standardowego)

Miary asymetrii

$\bar{x} = Me = Mo$ - rozkład symetryczny

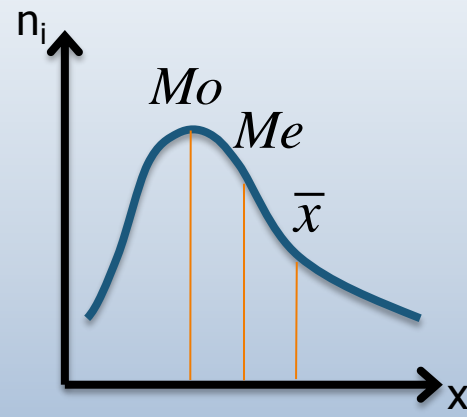
$\bar{x} > Me > Mo$ - rozkład o asymetrii prawostronnej

$\bar{x} < Me < Mo$ - rozkład o asymetrii lewostronnej



Asymetria lewostronna

$\bar{x} < Me < Mo$



Asymetria prawostronna

$\bar{x} > Me > Mo$

Miary asymetrii i koncentracji

Wskaźnik asymetrii (skośności)
Określa kierunek

$$A_s = \bar{x} - Mo$$

Współczynnik asymetrii (skośności) –
klasyczo-pozycyjny

$$A_s = \frac{\bar{x} - Mo}{s}$$

Współczynnik asymetrii
tzw. klasyczny, zwany także momentem
centralnym rzędu trzeciego.
Określa kierunek i siłę asymetrii

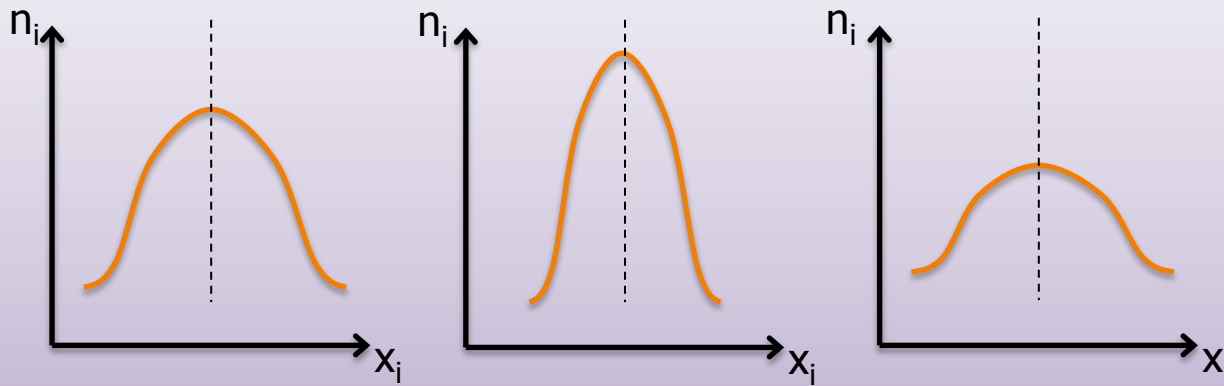
$$A_s = \frac{m_3}{s^3}$$

gdzie: $m_3 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3}{n}$

Interpretacja współczynnika asymetrii:

- **$As = 0$** **rozkład symetryczny**
- **$As > 0$** **asymetria prawostronna**
- **$As < 0$** **asymetria lewostronna**

Miary koncentracji



**Rozkład
normalny**

**Rozkład
wysmukły**

**Rozkład
spłaszczony**

Współczynnik skupienia (kurtoza) – jest miarą skupienia poszczególnych obserwacji wokół średniej.

$$K = \frac{m_4}{s^4}$$

gdzie:

$$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$$

Interpretacja współczynnika skupienia:

$k < 3$	rozkład spłaszczony
$k = 3$	rozkład normalny
$k > 3$	rozkład wysmukły

Tabela pomocnicza dla obliczenia wariacji (odchylenia standardowego), asymetrii i kurtozy

x_i	$x_i \uparrow$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$
3					
6					
4					
8					
4					
5					
6					
3					
7					
4					
			$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$

Tabela pomocnicza dla obliczenia wariancji (odchylenia standardowego), asymetrii i kurtozy

x_i	$x_i \uparrow$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$
3	3	-2,00	4,00	-8,00	16,00
6	3	-2,00	4,00	-8,00	16,00
4	4	-1,00	1,00	-1,00	1,00
8	4	-1,00	1,00	-1,00	1,00
4	4	-1,00	1,00	-1,00	1,00
5	5	0,00	0,00	0,00	0,00
6	6	1,00	1,00	1,00	1,00
3	6	1,00	1,00	1,00	1,00
7	7	2,00	4,00	8,00	16,00
4	8	3,00	9,00	27,00	81,00
			$\Sigma = 26,00$	$\Sigma = 18,00$	$\Sigma = 134,00$

$\bar{x} = 5$; $Me = 4,5$; $Mo = 4$; $s^2 = 2,6$; $s = 1,61$; $v = 32,25$; $As = 0,43$; $Ku = 1,98$